Domácí úkol ze cvičení 12.

Příklady k promyšlení ze cvičení 12:

Implicitní funkce:

1. a) Dokažte, že rovnicí $2x^2+2y^2+z^3+8xz-z+8=0$
   je definována v okolí bodu $(-2,0,1)$ implicitní funkce $z=f(x,y), f\in C^2(U(-2,0))$.
   b) Ukažte, že bod $(-2,0)$ stacionárním bodem funkce $f(x,y)$.
   c) Nabývá funkce $z=f(x,y)$ v bodě $(-2,0)$ lokální extrém?

2. a) Nechť funkce F(x, y, z) má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) a nechť platí $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$, v bodě (x_0,y_0,z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0,y_0,z_0) nenulová.

   b) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (1, 2, -1) k ploše, dané rovnicí
   $$x^3+y^3+z^3+xyz-6=0\ .$$

3. Ukažte, že soustava rovnic
   $$x^2+y^2=z,$$
   $$x+y+z=2 \qquad (*)$$
   má v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,2)$ řešení ve tvaru $y=y(x)$, $z=z(x)$. Určete $y'(-1)$ a $z'(-1)$ a tečný vektor ke křivce, dané rovnicemi (*), v bodě $(-1,1,2)$.

Extrémy :

1. Vyšetřete na množině M globální a lokální extrémy funkce
   a) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$, $M=R^2$;
   b) $f(x,y,z)=-x^3+6xz+2y-y^2-6z^2$, $M=R^3$.

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y)$ na množině M, je-li:
   a) $f(x,y)=xy^2$, $M=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1\}$;
   b) $f(x,y)=xy$, $M=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1\}$;
   d) $f(x,y,z)=x+y+z$, $M=\{(x,y,z)\in R^3; x^2+y^2\le z<1\}$
   e) $f(x,y,z)=x-2y+2z$, $M=\{(x,y,z)\in R^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}$
   f) $f(x,y,z)=xy+z^2$, $M=\{(x,y,z)\in R^3;\ x^2+y^2+z^2\le 1\wedge x\ge 0\}$;